Parte II

Contaminación acústica.

Capítulo 5

Conceptos físicos básicos sobre las vibraciones y el sonido

Introducción

En este capítulo se repasarán conceptos de vibraciones y ondas que ya se han visto en otras asignaturas de Física y que en algunos aspectos son muy similares a los expuestos en el Capítulo 3. El movimiento ondulatorio como base para entender una onda mecánica, los tipos de onda mecánicas longitudinales o transversales, etc.

También se explicará el sonido en términos de ondas de presión y se describirán las características del ruido tanto físicas como psicoacústicas, y se propondrán unos índices para su evaluación.

Objetivos

- Familiarizarse con los conceptos relacionados con la física del sonido
- Integrar el concepto matemático de onda con el de sonido
- Reconocer distintos tipos de ruido y su caracterización

5.1. Oscilaciones y vibraciones

El fenómeno de oscilación está muy ligado al de equilibrio. Un sistema mecánico en equilibrio estable, si sufre una perturbación que lo aparte del equilibrio, se mueve de tal forma que tiende a restaurar el equilibrio; ese movimiento, por el principio de conservación de la energía, hace pasar al sistema, a través del equilibrio, a otro estado de desequilibrio produciéndose el fenómeno de la oscilación. Si el sistema tiene una manera de disipar la energía trasmitida por la perturbación original, entonces volverá a su situación de equilibrio estático en algún momento.

5.1.1. Oscilación en sistemas puntuales: el resorte

Aunque nuestro objetivo serán las vibraciones en medios continuos, empezaremos con la física de sistemas más simples que nos ayudarán a entender el objetivo final. El sistema más sencillo es el resorte unidimensional, donde la atención se centra en el móvil, que se considera puntual, y no en el medio al que éste va unido —resorte— y que proporciona las características peculiares del movimiento. Para todos los efectos, el medio carece de masa y su intervención se concreta en la acción sobre el móvil real.

Ecuación de movimiento

El resorte unidimensional, en la aproximación más sencilla y lineal, se caracteriza por la llamada **constante de Hooke**, k, que proporciona la fuerza elástica de recuperación cuando se establece una cierta deformación, x.

$$F = -kx$$

La ecuación que rige el movimiento, $x(t)$, que nos da la posición de una masa puntual, m, ligada al extremo del resorte, se expresa entonces de la siguiente forma, aplicando la 2ª Ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

El cociente k/m tiene dimensiones de inversa de tiempo al cuadrado $\left[\mathrm{T}^{-2}\right]$ y lo podemos englobar en un parámetro, ω_o, de tal forma que

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2 \tag{5.2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_o^2 x \tag{5.3}$$

Este parámetro se conoce como *frecuencia propia del oscilador*, ya que la solución general a la ecuación 5.3 es

$$x\,(t) = A\,\cos\left(\omega_o t + \varphi\right) \tag{5.4}$$

que corresponde a un *movimiento armónico simple* (MAS) de frecuencia ω_o, donde las constantes A y φ quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema. A no es más que la máxima amplitud del movimiento, esto es, el máximo desplazamiento del móvil respecto a su posición de equilibrio.

Es de destacar que el parámetro que describe el movimiento, justamente la frecuencia propia del oscilador, surge como el cociente entre una cantidad que está relacionada con la *rigidez* del sistema (k, la constante de Hooke) y otra cantidad relacionada con la *inercia* (m, la masa del móvil). Esto será una característica común en las oscilaciones en medios continuos.

Al igual que en todo fenómeno armónico (como la corriente alterna o las OEM que hemos visto en otros capítulos), se pueden obtener otros parámetros relacionados, como la frecuencia cíclica $f_o = \omega_o/2\pi$, o el periodo del movimiento $T = 1/f_o$.

Energía

La energía mecánica del sistema viene dada por la suma de la energía potencial E_p y la energía cinética, E_k; ésta última depende sólo de la velocidad y masa del móvil

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

tomando $v = dx(t)/dt$ a partir de la expresión 5.4,

$$v = -A\omega_o \operatorname{sen}(\omega_o t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2{\omega^2}_o \operatorname{sen}^2(\omega_o t + \varphi)$$

La energía potencial sólo depende del desplazamiento y de la rigidez del resorte; por tanto, se circunscribe únicamente a circunstancias que se dan en el resorte mismo. Su expresión es:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi)$$

Y la energía total es la suma de ambas:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2{\omega^2}_o \operatorname{sen}^2(\omega_o t + \varphi)$$

donde podemos sustituir $k = m\omega_o^2$ a partir de la fórmula 5.2,

$$E = \frac{1}{2}mA^2{\omega^2}_o \left(\cos^2(\omega_o t + \varphi) + \operatorname{sen}^2(\omega_o t + \varphi)\right) = \frac{1}{2}mA^2{\omega^2}_o$$

Es decir, la energía mecánica total se mantiene constante —como era de esperar, por el principio de conservación de la energía— y se va distribuyendo entre energía potencial y energía cinética en las distintas fases del ciclo.

Oscilaciones en medio viscoso

Al oscilador ideal descrito hasta ahora vamos a añadir una característica más realista: el móvil se desplaza en un medio que presenta un cierto rozamiento viscoso, como puede ser el agua o el aire. Ese rozamiento se puede describir mediante una fuerza que actúa en dirección opuesta a la velocidad del móvil; en el límite de flujo laminar o no turbulento, esta fuerza es proporcional a la propia celeridad de la partícula

$$F_{\text{vis}} = -b\frac{dx}{dt}$$

donde el coeficiente b se denomina *coeficiente de rozamiento viscoso* y depende del medio en que se mueve el objeto, y del tamaño y forma geométrica precisa de éste. Por tanto, la ecuación de movimiento 5.1 se transforma ahora en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx \tag{5.5}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - \omega_o^2 x \tag{5.6}$$

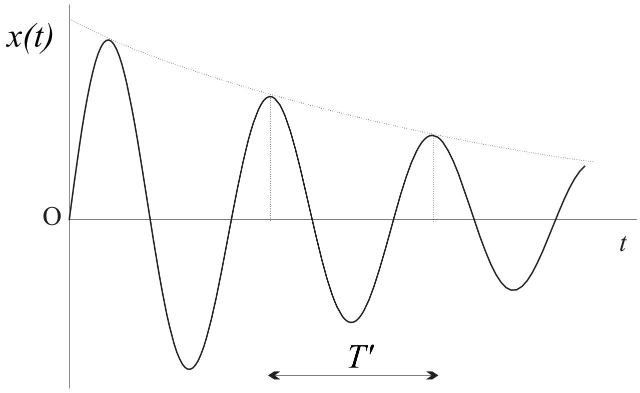

Figura 5.1: Solución oscilatoria amortiguada

donde $\gamma = b/m$ es el *coeficiente de amortiguamiento* y se expresa en unidades de s^{-1}, como la frecuencia ω_o. La solución de esta ecuación depende de los parámetros γ y ω_o. Si el amortiguamiento es pequeño —y esta condición se concreta en que $\gamma < 2\omega_o$— entonces tendremos una solución muy parecida a la expresada 5.4, pero donde el movimiento oscilatorio se ve modulado por una exponencial decreciente. Se llama solución oscilatoria amortiguada. Analíticamente se expresa como:

$$x\left(t\right) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}}\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

que también representa una especie de frecuencia angular. Para entender lo que representa, pensemos en el periodo asociado a esta frecuencia:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

T'se conoce como *pseudoperiodo* y representa el tiempo que transcurre entre dos máximos consecutivos de la señal. El prefijo *pseudo* viene del hecho que esta señal no es periódica y por tanto no se puede hablar en propiedad de un “periodo”; pero se parece al periodo de una señal oscilatoria como la que surge de la fórmula 5.4. En la figura 5.1 está representada la solución oscilatoria amortiguada.

Cuando el amortiguamiento es grande ($\gamma > 2\omega_o$) entonces decimos que el movimiento está *sobreamortiguado* y no se llega a producir ninguna oscilación. El móvil alcanza asintóticamente la condición de equilibrio sin sobrepasarla como en el caso oscilatorio.

En situación de amortiguamiento la energía mecánica no se conserva porque parte de la misma se cede al medio que causa el amortiguamiento.

El fenómeno del amortiguamiento viscoso se utiliza en sistemas de protección antivibraciones, como los amortiguadores de los vehículos terrestres.

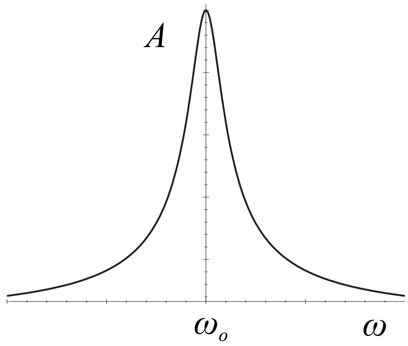

Figura 5.2: Curva de resonancia

Oscilaciones forzadas

Hasta ahora hemos dejado que el móvil acoplado al resorte oscile libremente. Pero podemos forzar el movimiento con una fuerza exterior al sistema, que llamaremos F, aparte de la fuerza interna de recuperación del resorte (ley de Hooke) y la fuerza de rozamiento viscoso.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx + F$$

La situación más interesante se da cuando F es función del tiempo, $F(t)$, y particularmente, cuando es periódica de la forma,

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$

entonces la ecuación de movimiento se puede expresar así

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - \omega_o^2 x + \frac{F_o}{m}\cos(\omega t) \tag{5.7}$$

La solución general es complicada, pero existe lo que se llama la *solución estacionaria*, esto es, la solución que describe el comportamiento del sistema cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente largo, que resulta ser bastante simple. La solución estacionaria es,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

donde la amplitud de la oscilación, A, y su desfase, δ, dependen tanto de la frecuencia de la fuerza periódica, ω, como de la frecuencia propia del oscilador que ya hemos visto en el primer epígrafe, ω_o (ver fórmula 5.2). Fijándonos sólo en la amplitud, su expresión es:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

Obsérvese que la amplitud depende mucho de la relación entre la frecuencia de la fuerza externa, ω, y la frecuencia propia del oscilador ω_o. Cuanto más parecidas sean, mayor es la amplitud como se ve en la figura 5.2. Para entenderlo mejor, supóngase que el amortiguamiento es muy pequeño ($\gamma \to 0$), entonces cuando la frecuencia de la fuerza externa se aproxima a la frecuencia propia del oscilador ($\omega \simeq \omega_o$) la amplitud se hace infinita.

Este fenómeno es muy importante en Física y, particularmente, en esta materia. Se conoce como *resonancia* y, por tanto, la frecuencia propia del oscilador también se llama *frecuencia de resonancia.*

Como veremos en próximas secciones, los medios extensos se comportan, bajo determinadas condiciones, como un oscilador con cierta amortiguación y con varias frecuencias de resonancia.

5.1.2. Oscilaciones en medios extensos: la cuerda vibrante

Una vez entendido el sistema más simple posible —el punto material oscilando en una dimensión— podemos avanzar en complejidad y empezar a analizar sistemas físicos reales. El siguiente paso en complejidad es, por tanto, un medio unidimensional oscilando en la dimensión perpendicular. Es decir, la cuerda tensa y sujeta por dos extremos.

Las oscilaciones en otro tipo de medios se pueden tratar mejor en la sección siguiente sobre propagación de vibraciones en medios materiales. De hecho, las oscilaciones en la cuerda se pueden entender perfectamente como la interferencia de dos ondas de vibración propagándose en direcciones opuestas.

Ecuación de movimiento

Estudiemos, por tanto, el sistema que podemos representar por una cuerda o hilo idealmente unidimensional, de longitud L. La cuerda está sometida a una tensión F (expresada en unidades de fuerza) y tiene una cierta densidad lineal de masa homogénea μ (expresada en kg/m o en gr/cm). Típicamente, cualquier cuerda de un instrumento musical —violín, guitarra, piano, etc.— es un buen ejemplo de este sistema.

Podemos estudiar su movimiento analizando el desplazamiento vertical de cada punto de la cuerda. Si suponemos que la cuerda descansa en el eje x, entonces el desplazamiento vertical lo podemos considerar sobre el eje y de la forma $y\left(x,t\right)$.

La solución trivial del sistema es $y\left(x,t\right)=0$, que corresponde a la situación de equilibrio. La primera solución no trivial es:

$$y\left(x,t\right)=A\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\omega_o t+\varphi\right)$$

donde la fase φ es arbitraria y

$$\omega_o=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{5.8}$$

se denomina *frecuencia del modo fundamental* o del *primer armónico.* Como se puede comprobar fácilmente, el desplazamiento es nulo en los puntos $x=0$ y $x=L$, que es justamente la situación que cabe esperar al estar la cuerda anclada en esos dos puntos.

Hay más soluciones, infinitas de hecho; pero todas ellas tienen la forma siguiente:

$$y_n\left(x,t\right)=A_n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\omega_n t+\varphi_n\right) \tag{5.9}$$

donde n es un número entero $(n=1,2,3,4\ldots)$. Cada una de estas soluciones y_n se llama *modo de vibración* o también *armónico*, por eso el modo fundamental se llama primer armónico.

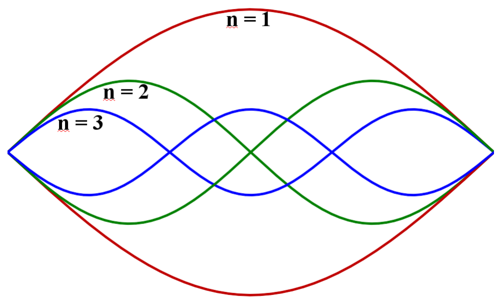

Figura 5.3: Representación de los tres primeros modos de vibración de una cuerda

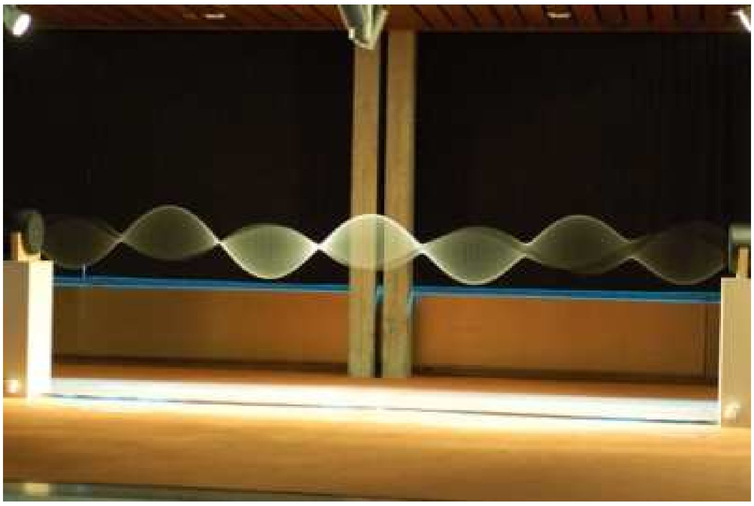

Figura 5.4: Fotografía de una cuerda vibrando en el modo $n = 7$

En la Figura 5.3 se puede ver una representación gráfica de los modos dados por la fórmula 5.9 —con $n = 1, 2, 3$— pero "congelados" en el tiempo en su máxima amplitud. Como se ve, la oscilación de cada modo presenta n *vientres* (zonas de máxima amplitud) y $n - 1$ nodos (zonas estáticas, excluyendo los extremos).

Las frecuencias a la que vibran estos modos están dadas por $\omega_n = n\omega_o$, es decir las frecuencias de los distintos armónicos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

La cuerda puede vibrar en cualquier combinación de modos, esto es, cualquier combinación de amplitudes de modo, A_n, es una forma válida de vibración de la cuerda.

Relación con el modelo del resorte

Si analizamos las fórmulas 5.2 y 5.8 vemos que hay algunas similitudes notables. Las dos frecuencias dependen del cociente entre la *rigidez* y la *inercia* del sistema; recordemos que, en el resorte, la rigidez está representada por la constante de Hooke k y la inercia por la masa m. Pues ahora, en el caso de la cuerda, la tensión F juega el rol de la constante de Hooke y la densidad lineal de masa de la cuerda sería lo que en el resorte es la masa m.

También significa que una cuerda tensa sujeta por sus extremos presenta múltiples frecuencias de resonancia, es decir que del mismo modo que el resorte unidimensional, una fuerza externa periódica tendrá más éxito forzando la oscilación de la cuerda si su frecuencia coincide con la frecuencia de alguno de los modos de ésta. En la Figura 5.4 se muestra una foto de una cuerda forzada a oscilar en su modo $n = 7$.

Por otra parte, aunque no se ha incluido en la fórmula por simplicidad, la oscilación de la cuerda también presenta el fenómeno de amortiguamiento de forma muy similar al del resorte, y que cualquiera que haya jugado con un instrumento de cuerda ha podido verificar: tras excitar la vibración en una cuerda ésta va amortiguando poco a poco su movimiento por el rozamiento de la cuerda con los puntos de apoyo y, sobre todo, por ceder parte de su energía al medio que la rodea (el aire) que transporta la vibración en forma de ondas, como veremos en las secciones siguientes.

5.2. Propagación de vibraciones en medios materiales

En esta sección estudiaremos cómo una perturbación se propaga en un medio material, particularmente cuando esa perturbación es periódica (vibración). La propagación se produce por medio de ondas, llamadas *ondas elásticas* y también *ondas acústicas*[1]; en el Capítulo 3 ya hemos visto ondas en su versión electromagnética; nos referiremos frecuentemente a ese capítulo y a las OEM porque hay muchas propiedades comunes.

En una onda acústica lo que se propaga es algún tipo de compresión o desplazamiento del medio (en las OEM eran los campos eléctrico y magnético el objeto de propagación). La forma general de una onda propagándose en una dirección es:

$$\xi(x, t) = f(ct - x) \tag{5.10}$$

Lo que dice la ecuación 5.10 es simplemente que la dependencia de la perturbación (representada por la letra ξ) en (x, t) es tal que puede ser representada por **cualquier función** de una variable $f(z)$ donde z aglutina a (x, t) como $z = ct - x$. El parámetro c es muy importante: representa la velocidad de propagación de la onda en el medio.

La velocidad c tiene una expresión distinta según el medio y tipo de onda que tratemos, pero todas aquellas que se pueden explicar mediante un modelo lineal siguen la siguiente fórmula genérica:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{5.11}$$

donde K es alguna magnitud que representa la compresibilidad del medio —esto es, su rigidez— y ρ es la densidad de masa —su inercia—.

5.2.1. Tipos de ondas elásticas

Las ondas acústicas pueden ser **transversales** (como las OEM) si la magnitud que se propaga es una deformación perpendicular a la dirección de la onda; por ejemplo, las ondas en un estanque. O bien pueden ser **longitudinales** si lo que se propaga es una deformación en la

[1] El adjetivo "acústico" empleado para definir estas ondas hace referencia, por supuesto, al sonido.

misma dirección de propagación, siendo el ejemplo más característico el sonido en el aire que estudiaremos más adelante de forma independiente.

Además, según la dimensionalidad de la onda pueden ser:

Ondas unidimensionales

Son ondas transversales que se dan en un medio unidimensional como una cuerda. El ejemplo típico es la manguera de agua y cómo se propaga la "joroba" que se forma cuando se aplica la presión bruscamente. Cuando el medio unidimensional está sujeto por dos extremos, entonces tenemos la situación descrita en la sección 5.1.2; de hecho, los resultados allí expuestos se pueden obtener a partir del análisis de ondas viajeras que interfieren con las ondas reflejadas en una cuerda sujeta por los extremos.

La velocidad de una onda en una cuerda es justamente la segunda parte de la ecuación 5.8:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Ondas superficiales

Las ondas superficiales se dan en la superficie frontera de dos medios y son siempre transversales. Típicamente son las ondulaciones en la superficie de un líquido como las olas marinas. La dinámica de las olas sigue un modelo más complicado que el lineal y sencillo que estamos considerando aquí. La velocidad de las olas depende tanto de su longitud de onda como de la profundidad de agua donde evolucionan.

También se dan ondas superficiales en la frontera de sólidos con un fluido. Las más importantes son las llamadas *ondas L* y *ondas Raleigh*, que son ondas sísmicas de superficie que se dan en terremotos.

Ondas en sólidos

Las ondas en sólidos pueden ser de tipo longitudinal y también transversal. En un sólido en forma de barra, la velocidad de las ondas longitudinales viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{5.12}$$

donde Y es el *módulo de Young*, que es una propiedad del sólido que mide su elasticidad en términos del cociente entre el esfuerzo de compresión que se aplica y la deformación que se produce en el sólido.

Las ondas longitudinales en un sólido extenso se llaman también *ondas P* en el contexto de la sismología, y se representan en la Figura 5.5. La velocidad de las ondas P es

$$c = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{5.13}$$

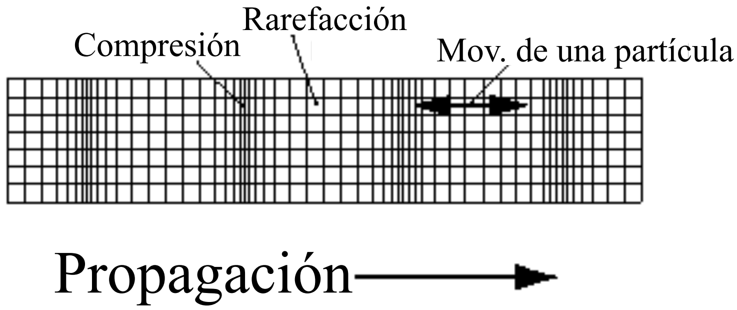

Figura 5.5: Esquema de ondas longitudinales en un sólido

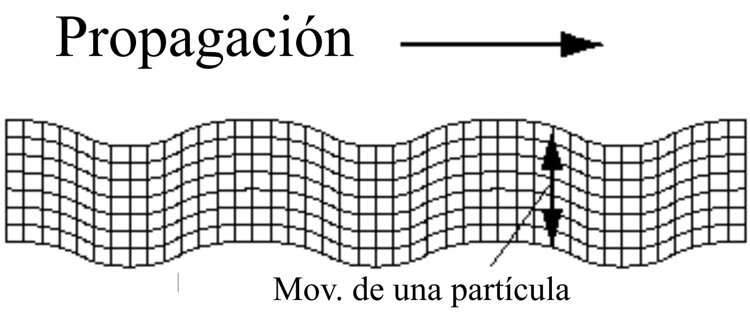

Figura 5.6: Esquema de ondas transversales en un sólido

donde K es el *módulo de compresibilidad*, (ver ecuación 5.16) y G es el *módulo de cizalladura* (ver ecuación 5.14). Todos estos parámetros que definen la rigidez de un sólido —Y, K, G— tienen las mismas unidades que la presión y se miden en *pascales* (Pa).

En un medio rígido como el granito la velocidad de propagación puede ser tan grande como 5000 m/s.

Las ondas elásticas transversales en un sólido se llaman *ondas S* y se puede ver un esquema en la Figura 5.6. La velocidad de las ondas S es

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{5.14}$$

donde G es el *módulo de cizalladura*, o el cociente entre el esfuerzo de corte y la deformación obtenida.

Los nombres ondas P y ondas S provienen de la terminología sísmica: las ondas P —longitudinales— se desplazan más velozmente y llegan antes a los sismógrafos; son por tanto las *ondas primarias*. Las ondas S —transversales— llegan más tarde y son por tanto las *ondas secundarias*.

Ondas en fluidos

Las ondas en el seno de un fluido son del tipo longitudinal[2] y la velocidad está dada por:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{5.15}$$

donde K es el *módulo de compresibilidad* que ya hemos visto anteriormente en el sólido. Su definición genérica es:

$$K = -V\frac{\partial P}{\partial V} \tag{5.16}$$

es decir, es proporcional al cambio de la presión (∂P) necesaria para cambiar el volumen del material en una cantidad ∂V. Como se ve en en la ecuación 5.16, el módulo de compresibilidad tiene unidades de presión y se expresa, por tanto, en *pascales* (Pa).

Los fluidos son tanto los gases como los líquidos. A los primeros les vamos a dedicar una sección completa, por tanto nos concentraremos ahora en los líquidos. Por ejemplo, el módulo de compresibilidad del agua oscila entre $2,2\,\mathrm{GPa}$ ($2,2 \times 10^9\,\mathrm{Pa}$) para el agua pura y $2,5\,\mathrm{GPa}$ para el agua marina. Las velocidades típicas de las ondas elásticas en el agua son de $1500\,\mathrm{m/s}$ en agua dulce y $1560\,\mathrm{m/s}$ en agua marina.

Tanto en fluidos como en sólidos se define otra propiedad importante del medio que es la *impedancia acústica*, la cual se representa por z; su valor es:

$$z = \rho c \tag{5.17}$$

La impedancia acústica se mide en $\mathrm{Pa\,m^{-1}\,s}$ que es equivalente a $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$; a esta unidad también se la conoce como *rayl* (por Lord Rayleigh).

5.3. Ondas elásticas en el aire: el sonido

La palabra “sonido”, en su acepción más intuitiva y tradicional, abarcaría aquellas ondas elásticas que el ser humano es capaz de oír: es decir, ondas elásticas que se propagan en el aire, con componentes espectrales en el rango entre $20\,\mathrm{Hz}$ y $20\,\mathrm{kHz}$. En Física, el concepto “sonido” se ha generalizado a todo lo relacionado con las ondas elásticas en cualquier medio, de ahí que las ondas elásticas se denominen también *ondas acústicas*.

El fenómeno de la propagación del sonido en el aire es tan relevante, que le vamos a dedicar una sección completa. Muchos de los conceptos que aquí se tratan son también de aplicación a cualquier tipo de onda elástica; no obstante, hemos preferido particularizar en las ondas acústicas en el aire para mayor claridad.

Fuentes de sonido

Los objetos en vibración en el seno del aire transmiten esa vibración a éste en forma de ondas acústicas. Las típicas fuentes de sonido pueden ser los instrumentos musicales y el origen de

[2] En el seno de un fluido homogéneo no pueden establecerse ondas elásticas transversales porque los fluidos no soportan esfuerzos de cizalladura; pero en fluidos inhomogéneos sí, como es el caso de las ondas superficiales en la frontera agua-aire.

la vibración es distinto según el tipo de instrumento: en los instrumentos de cuerda, son las cuerdas (ver sección 5.1.2); en los instrumentos de viento resuena la columna de aire merced a la excitación producida por: lengüetas de madera (clarinete, oboe), los labios del ejecutante (trompeta), o la resonancia pura en la columna de aire (flauta).

Si se trata de vibraciones periódicas, la onda que se transmite al aire **conserva la misma frecuencia** que la vibración fuente.

5.3.1. Velocidad del sonido

La velocidad del sonido en el aire viene dada por la ecuación genérica 5.15. Para calcular el módulo de compresibilidad, K, tenemos que aplicar la ecuación 5.16; pero antes tenemos que saber cómo depende la presión con el volumen en un gas. En el proceso de propagación de la onda, las compresiones y rarificaciones del medio (véase la Figura 5.5, que se puede aplicar a cualquier onda longitudinal) se verifican de forma *adiabática*, esto es, conservando la entropía. Bajo estas circunstancias, la presión y el volumen de un gas están conectados por la relación

$$PV^{\gamma} = B \tag{5.18}$$

donde B es una constante y γ es el *coeficiente de dilatación adiabática*; su valor es:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

esto es, el cociente adimensional entre la capacidad calorífica del gas a presión constante y la capacidad calorífica del gas a volumen constante. Para gases compuestos por moléculas diatómicas, como el aire, este valor es

$$\gamma = 1,4 \tag{5.19}$$

Ya podemos aplicar la ecuación 5.16, teniendo en cuenta la dependencia de P con V que nos da la expresión 5.18, lo que arroja el siguiente resultado para K:

$$K = \gamma P \tag{5.20}$$

Si consideramos al aire un gas ideal, entonces la ecuación de estado de los gases ideales nos da la relación entre la presión, densidad y temperatura del aire:

$$P = nRT \tag{5.21}$$

donde R es la constante molar de los gases —cuyo valor en el SI es $R = 8,314\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$— y n es la densidad molar del gas.

Por otro lado, la densidad de un gas no es más que:

$$\rho = nM \tag{5.22}$$

donde M es la masa molar expresada en $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$. Introduciendo las expresiones 5.20, 5.21 y 5.22 en 5.15 obtenemos:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{5.23}$$

Vemos que la ecuación 5.23 hace depender la velocidad del sonido en un gas directamente de su masa molar y de la temperatura.

Ejemplo Para el aire, con masa molar promedio de $0,029\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}$, a una temperatura de $25\,°\mathrm{C}$ ($T \simeq 298$ K), la velocidad es

$$c \simeq 346 \text{ m/s}$$

5.3.2. Ondas acústicas

Ya hemos dicho que las ondas acústicas en el aire son ondas longitudinales de presión, esto es, el medio sufre compresiones y rarefacciones en su seno (como muestra la Figura 5.5) pero sin que la materia sea transportada. Para describir la perturbación podemos pensar que la presión en cualquier punto del medio[3], x, y en cualquier momento, t, es la suma de la presión promedio —que es la misma en todo el medio— más la presión perturbada, $\overline{P}+P\,(x,t)$, donde $P\,(x,t)$ representa a ξ en la ecuación 5.10:

$$P\,(x,t) = f\,(ct - x) \tag{5.24}$$

Otra magnitud importante es la *velocidad de arrastre*, $v\,(x,t)$ que es la velocidad a la que es sometida una partícula suspendida en el medio en el punto x y en el momento t; también está indicado ese arrastre en la Figura 5.5: cuando a la partícula testigo llega la zona de compresión, ésta se acelera en el sentido de la propagación, y cuando le llega la zona de rarefacción lo hace en sentido opuesto. Pero esta velocidad necesariamente tiene que tener un promedio **nulo**, puesto que la onda no transporta material neto. Su expresión es:

$$v\,(x,t) = \frac{P\,(x,t)}{z} \tag{5.25}$$

donde z es la impedancia acústica del medio, dada por la fórmula 5.17.

> Atención: Es muy importante no confundir este concepto de *velocidad de arrastre*, que es una propiedad de cada punto del medio que varía con el tiempo, con el de *velocidad de propagación* de la onda, que es una propiedad global del medio, constante en el tiempo.

Ondas acústicas planas

Al igual que hicimos con las OEM, vamos a centrar el estudio de las ondas acústicas en el modelo de ondas planas, que es una forma de propagación periódica en el espacio y en el tiempo y con un frente de onda plano. Bajo esta simplificación, la forma de la función f en la ecuación 5.24 es tal que:

$$P\,(x,t) = P_o \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,(ct - x)\right) \tag{5.26}$$

la cual representa una onda de longitud de onda λ que se propaga en la dirección x en sentido positivo. Esta expresión se puede escribir de una forma más familiar, como la que usamos para las OEM en la sección 3.3.1:

$$P\,(x,t) = P_o \cos\,(\omega t - kx) \tag{5.27}$$

[3]Para mayor simplicidad, señalaremos las posiciones mediante una sola variable, x, como si el medio fuera unidimensional.

donde k y ω tienen el mismo significado que la sección 3.3.1, así como todas las magnitudes asociadas a una onda de este tipo.

La velocidad de arrastre tiene la misma forma,

$$v(x,t) = v_o \cos(\omega t - kx) \tag{5.28}$$

siendo su amplitud

$$v_o = \frac{P_o}{z} \tag{5.29}$$

como se deduce de la fórmula 5.25.

En las ondas acústicas también se define el concepto de *intensidad de la onda,* en el mismo sentido que el dado por la ecuación 3.6 en el caso de las OEM, esto es, como flujo de potencia —potencia por unidad de área— que se mide en W/m^2. Aquí llamamos I a lo que la ecuación 3.6 llamaba S:

$$I = \langle P(x,t)\, v(x,t)\rangle = \frac{1}{z}\left\langle P^2(x,t)\right\rangle$$

donde, como siempre, los ángulos indican el promedio temporal. El cálculo del promedio temporal de funciones seno y coseno elevadas al cuadrado ya lo hemos aprendido en la sección 2.5.1. Aplicándolo a este caso:

$$I = \frac{P_o^2}{2z} \tag{5.30}$$

Es decir, la intensidad depende de la amplitud de oscilación de la presión al cuadrado, de forma similar a cómo la intensidad de la OEM depende de la amplitud de los campos al cuadrado.

Ondas acústicas esféricas

El modelo de ondas planas tiene sus limitaciones, como ya vimos en el caso de las OEM. Para describir mejor las ondas acústicas que emanan de una fuente puntual —o de aquellas fuentes que pueden ser consideradas puntuales si su tamaño es mucho menor que la distancia a la que se escuchan— usamos el modelo de ondas esféricas, donde la amplitud depende de la distancia, r, como $1/r$:

$$P_o(r) = \frac{k}{r} \tag{5.31}$$

por tanto, de la ecuación 5.30 deducimos que la intensidad sonora disminuye con la distancia como $1/r^2$.

5.3.3. Transmisión y reflexión de ondas acústicas

Consideraremos aquí el problema de una onda acústica que se encuentra con un obstáculo. En el medio donde viaja inicialmente la onda se caracteriza por una velocidad de propagación c_1 y una impedancia z_1; el obstáculo es la frontera plana con otro medio —caracterizado por una velocidad de c_2 y una impedancia z_2— donde suponemos que la onda incide perpendicularmente (véase Figura 5.7). Cuando una onda cambia de medio, conserva la misma frecuencia que en el medio de origen, mientras que su constante de propagación se modifica en función de la velocidad del sonido en el medio:

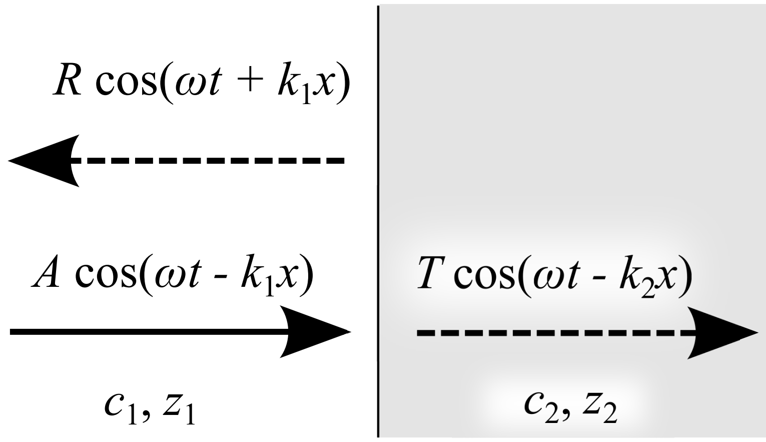

Figura 5.7: Transmisión y reflexión de una onda acústica de forma perpendicular a la frontera de separación entre dos medios. La onda incidente tiene amplitud A, la onda reflejada R y la transmitida T.

$$k_i = \frac{\omega}{c_i} \tag{5.32}$$

La onda incidente es $A\,\cos(\omega t - kx)$, la reflejada $R\,\cos(\omega t + kx)$ (obsérvese el cambio de signo del término kx, al viajar la onda reflejada en sentido opuesto) y la transmitida $T\,\cos(\omega t - kx)$.

En la interfaz, que tomamos por origen de coordenadas ($x = 0$) se tienen que cumplir dos condiciones:

1. Las presiones a ambos lados de la interfaz tienen que ser iguales en todo momento. La única forma de verificar esto es que las amplitudes —que, recordemos, representan presiones— cumplan la siguiente relación:

$$A + R = T \tag{5.33}$$

2. Las velocidades de arrastre tienen que ser las mismas a ambos lados de la interfaz. Para ello aplicamos la relación 5.29 y tenemos en cuenta que la velocidad de arrastre de la onda reflejada debe tener el signo cambiado en la interfaz:

$$\frac{A}{z_1} - \frac{R}{z_1} = \frac{T}{z_2} \tag{5.34}$$

Resolviendo las ecuaciones 5.33 y 5.34:

$$\begin{aligned} R &= A\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \\ T &= A\frac{2z_2}{z_2 + z_1} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Observamos que si $z_2 < z_1$ la onda reflejada cambia de signo respecto a la onda incidente lo que quiere decir que si la onda incidente llega a la pared en fase de compresión, la onda reflejada empieza desde el estado opuesto de rarefacción. Si $z_2 > z_1$ (situación normal cuando el primer medio es el aire y el segundo medio es un sólido, como puede ser una pared), entonces la onda reflejada está en la misma fase que la onda incidente.

Al igual que en el caso de las OEM, se pueden definir los coeficientes de transmisión y reflexión, respectivamente $\mathcal{T}$ y $\mathcal{R}$ (la absorción la trataremos aparte).

El coeficiente de transmisión es el cociente entre la intensidad de la onda transmitida y la intensidad de la onda incidente, esto es, usando la definición 5.30:

$$\mathcal{T} = \frac{T^2/2z_2}{A^2/2z_1} = \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{T}{A}\right)^2$$

y sustituyendo la expresión de T obtenida en 5.35 tenemos finalmente:

$$\mathcal{T} = \frac{4z_2 z_1}{(z_2+z_1)^2} \tag{5.36}$$

De la misma forma, el coeficiente de reflexión es el cociente entre la intensidad de la onda reflejada y la intensidad de la onda incidente. De igual forma que antes,

$$\mathcal{R} = \frac{R^2/2z_1}{A^2/2z_1} = \left(\frac{R}{A}\right)^2$$

que usando el resultado de R obtenido en 5.35 nos da la expresión:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}\right)^2 \tag{5.37}$$

Vemos que se conserva la energía, esto es, que la energía que porta la onda incidente se reparte entre la onda reflejada y la onda transmitida. Esto se puede comprobar viendo que $\mathcal{R}+\mathcal{T} = 1$.

De estas expresiones observamos que cuanto más parecida sea la impedancia de los dos medios, menor reflectividad y más transmitividad tiene la frontera entre ambos (en el límite $z_1 = z_2$, $\mathcal{R} = 0$ y $\mathcal{T} = 1$). Recíprocamente, cuanto mayor es la diferencia de impedancias, mayor es la reflectividad y menor la transmitividad. Además, la reflectividad y transmitividad de la frontera no cambia al pasar incidir desde el otro medio; esto lo podemos comprobar intercambiando z_1 por z_2 en las expresiones 5.36 y 5.37 y verificando que el resultado es el mismo.

Transmisión a través de un tabique

Una de las situaciones de interés más frecuente es estudiar la transmisión de sonido a través de un tabique sólido de cierto grosor L. En este caso, tenemos dos fronteras: medio 1 $\rightarrow$ medio 2 $\rightarrow$ medio 1, donde el medio 1 sería el aire y el medio 2 el sólido, siendo por tanto $c_1 \ll c_2$ y $z_1 \ll z_2$.

El estudio sería similar al de la sección anterior, pero al haber dos fronteras hay reflexión interna y el álgebra es más complicada, por lo que adelantaremos el resultado final. En resumen, si suponemos que no hay absorción en el medio y que se cumplen las relaciones anteriores, entonces tenemos,

$$\mathcal{T} \simeq \left(\frac{2z_1}{z_2\,\mathrm{sen}(k_2 L)}\right)^2$$

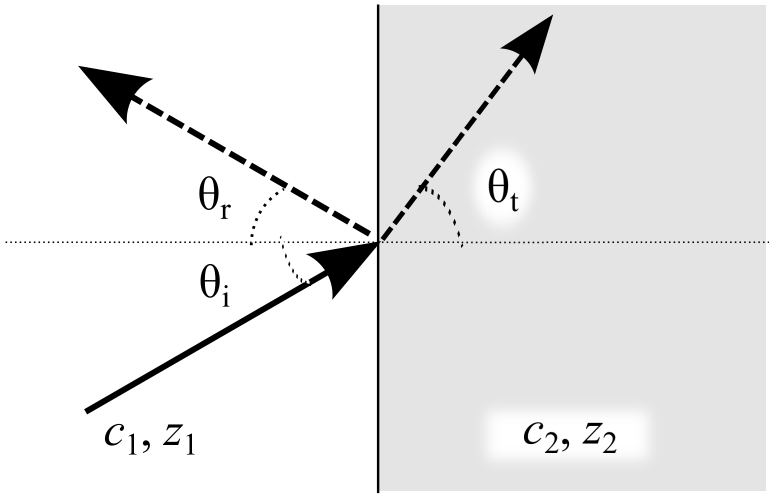

Figura 5.8: Onda acústica incidiendo oblicuamente sobre la frontera de separación de dos medios, con las ondas reflejada y transmitida. En esta figura $c_2 > c_1$.

si la pared del tabique es pequeña comparada con la longitud de onda, $L \ll \lambda_2$, entonces $\mathrm{sen}(k_2 L) \simeq k_2 L$. Sustituyendo y aplicando 5.17 y 5.32 llegamos a:

$$\mathcal{T} \simeq \left(\frac{2z_1}{\rho_2 \omega L}\right)^2 \tag{5.38}$$

Observamos que el tabique transmite con mayor facilidad ondas de baja frecuencia que ondas de alta frecuencia, esto es, los sonidos graves pasan con más facilidad que los agudos a través de un tabique.

Este análisis no tiene en cuenta la posible absorción del medio (que veremos más adelante). Se trata de un modelo sencillo, de tabique homogéneo y rígidamente encastrado, que no tiene en cuenta inhomogeneidades, oquedades, panelados con anclajes elásticos, etc. Dependiendo de estos detalles podríamos tener fenómenos resonantes que harían que ciertas frecuencias intermedias pudieran tener mayor transmitancia que la que dice la fórmula 5.38.

Incidencia oblicua

Cuando una onda acústica incide oblicuamente en la superficie las expresiones anteriores se complican mucho. No obstante, podemos llegar fácilmente a resultados cualitativos, puesto que las ondas acústicas se comportan exactamente igual que los rayos de luz en la frontera de dos medios, como se ve en la Figura 5.8.

Al igual que en las leyes de la Óptica para la reflexión y la refracción, las ondas acústicas cumplen las siguientes condiciones en la frontera:

Ley de reflexión Los ángulos de incidencia y reflexión son iguales:

$$\theta_i = \theta_r \tag{5.39}$$

Ley de refracción Los ángulos de incidencia y transmisión están relacionados con las velocidades de propagación en ambos medios de la siguiente manera:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta_i)}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_t)}{c_2} \tag{5.40}$$

Ángulo de reflexión total Cuando la onda acústica viaja desde el medio de **menor** velocidad hacia el de **mayor** velocidad hay un ángulo de incidencia —que llamaremos ángulo límite o θ_L— a partir del cual no existe onda transmitida y sólo hay reflexión. Este ángulo de incidencia lo obtenemos de la fórmula anterior 5.40 cuando imponemos que el ángulo de la onda transmitida sea el máximo posible, $\theta_t = \pi/2$ y por tanto $\operatorname{sen}(\theta_t) = 1$:

$$\operatorname{sen}(\theta_L) = \frac{c_1}{c_2} \tag{5.41}$$

Absorción

Al igual que las OEM, las ondas acústicas también presentan atenuación por pérdida de energía al viajar por el medio. La forma en que esto ocurre es muy parecida a que vimos para las OEM que se progagan en conductores (ver sección 4.4.2): la amplitud de presión de la expresión 5.27 decae exponencialmente con la distancia, de forma que

$$P(x,t) = P_o e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - kx) \tag{5.42}$$

donde P_o sería la amplitud de la onda transmitida, justo al pasar la barrera (o sea, T en la Figura 5.7) y δ representa cuánto puede avanzar la onda en el medio hasta amortiguarse significativamente; como en la sección citada, podemos llamar a este parámetro *distancia de penetración* y da una idea del potencial absorbente del medio: cuanto más pequeño es δ, más absorbente es el medio. A veces el factor exponencial se puede presentar de esta otra forma:

$$e^{-\alpha x}$$

donde α es justamente el inverso de δ y representaría la *coeficiente de atenuación* del material (en unidades de m^{-1}).

La intensidad de la onda también disminuye según nos adentramos en el medio; como la relación entre intensidad y amplitud es cuadrática (ver 5.30), entonces:

$$I(x) = \frac{P_o^2}{2z} e^{-\frac{2x}{\delta}} \tag{5.43}$$

Supongamos un medio acústicamente absorbente con un cierto grosor L y una onda acústica plana con una intensidad I_o que incide sobre él. Inicialmente, la intensidad acústica que ha pasado la barrera viene dada por $I_o\mathcal{T}$ donde la transmitancia $\mathcal{T}$ viene dada por la fórmula 5.38. Cuando tenemos en cuenta la absorción, su intensidad será $I_o\mathcal{T}'$, donde $\mathcal{T}'$ es la transmitancia total de la barrera dada por,

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} e^{-\frac{2L}{\delta}}$$

Podemos definir por tanto un *coeficiente de absorción*, $\mathcal{A}$, de la barrera como:

$$\mathcal{A} = \mathcal{T} - \mathcal{T}' = \mathcal{T}\left(1 - e^{-\frac{2L}{\delta}}\right) \tag{5.44}$$

El valor de la distancia de penetración δ —o del coeficiente de atenuación, α— de los distintos medios depende de los mecanismos precisos por los cuales la onda cede su energía al medio. A priori, hay ciertos factores que favorecen que un medio absorba más eficazmente la energía acústica. Por ejemplo: heterogeneidad, es decir, que sea compuesto por diversos materiales. Que sea un medio disgregado, como por ejemplo, la arena, que es un gran absorbente de sonido y vibraciones. O bien que sea una mezcla de un medio homogéneo con otro disgregado, con una interacción entre ambos muy poco rígida. Por ejemplo, la niebla, que es una mezcla de aire con gotitas de agua en suspensión y que absorbe el sonido mucho más eficazmente que el aire puro.

Para dar un ejemplo concreto: el aire puro y seco prácticamente no atenúa el sonido. Pero el aire húmedo, aunque sea parcialmente, presenta algo de atenuación. Las siguientes fórmulas son una aproximación experimental de cómo es el coeficiente de atenuación para el aire con un 50 % de humedad relativa:

$$\begin{aligned} \alpha &\simeq 4\times 10^{-7} f \quad \text{si} \quad 100\,\mathrm{Hz} < f < 1\,\mathrm{kHz} \\ \alpha &\simeq 3\times 10^{-4} + 10^{-10} f^2 \quad \text{si} \quad 1\,\mathrm{kHz} < f < 100\,\mathrm{kHz} \end{aligned} \tag{5.45}$$

donde f está dado en hercios y α en m^{-1}.

Autoevaluación

1. De las siguientes opciones, indique cuál define con más precisión a las ondas elásticas:
   a) Las ondas elásticas son transversales
   b) Las ondas elásticas son longitudinales
   c) Las ondas elásticas transportan energía
   d) Las ondas elásticas transportan materia
2. Calcule la impedancia acústica del aire en condiciones normales de presión y temperatura.

Soluciones:

1. Opción C
2. $\sim 400\,\mathrm{Pa\,m^{-1}\,s}$